Análisis de componentes principales funcionales en series de tiempo económicas

Cristina O. Chávez Chong
cchavez@cemat.cujae.edu.cu
ISPAJE

Jesús E. Sánchez García
grupoest@icimaf.cu
ICIMAF

José DelaCerda Gastélum
josedlac@iteso.mx
ITESO

RESUMEN

El análisis de datos funcionales ha cobrado gran relevancia en los últimos años, convirtiéndose en un importante campo de investigación en la Estadística. El primer método considerado para procesar este tipo de datos fue el de las componentes principales. En este trabajo se considera la extensión del método de las componentes principales clásicas (ACP) al caso funcional (ACPF), algunas propiedades interesantes que aparecen y otras que se conservan al realizar dicha extensión, así como su aplicación el procesamiento de datos reales económicos y una breve explicación de algunas bibliotecas que realizan el análisis de componentes principales funcionales.

PALABRAS CLAVE: Análisis de Componentes Principales, Análisis de Componentes Principales Funcionales, Análisis de datos económicos.

INTRODUCCIÓN

El análisis de componentes principales (PCA) es probablemente la técnica más popular de la estadística multivariada y es utilizada en la mayor parte de las disciplinas científicas en las que se manejan información cuantitativa o cuantificada (Abdi & Williams, 2010). Esta se encarga de reducir la dimensión de un conjunto de datos mediante el cálculo de un grupo mucho menor de variables ortogonales que mejor representan el conjunto original de datos.

El análisis de componentes principales funcionales (ACPF) es una extensión del ACP clásico en el que las componentes principales están representadas por funciones y no por vectores (Ramsay & Sylverman, 2005). La filosofía principal del análisis de datos funcionales es la creencia de que la mejor fuente de información es la función observada y no un arreglo de números. Se supone que detrás de los datos existe una relación funcional que los gobierna. El ACPF ilustra la forma en que dicho conjunto de datos funcionales varía y en términos de este sentido de variación se cuantifica la discrepancia respecto a la media de cada dato funcional.

El uso de este método se ha extendido de forma veloz en los últimos años debido principalmente al aumento del volumen de información que es necesario procesar y a la distintiva capacidad de esta herramienta, heredada del ACP clásico, de reducir la dimensión. Numerosas son las esferas en las que aparecen datos funcionales y que pueden favorecerse con el empleo de este método: biomecánica (Cobelli et al., 2009), criminalística (Ramsay & Silverman, 2002), compresión de imágenes (Dony, 1995), finanzas (Constanzo, 2005) y ecología (Daniele, 2006) son algunas ramas en las que ya existen publicaciones.

Este trabajo presenta el método de las componentes principales funcionales como extensión del método clásico, así como un enfoque en el que se sigue el ACPF para el análisis estadístico de datos económicos. El análisis se realizará considerando el conjunto de datos compuesto por las ventas anuales de treinta empresas líderes de la economía mexicana en el período de 1978-2012.

El resto del documento está estructurado como sigue: En la próxima sección se presentan algunos detalles acerca del método de componentes principales clásico. La sección 3 introduce el análisis de componentes principales funcionales acompañado de algunas de sus propiedades. Finalmente, en la sección 4 se discuten los resultados de aplicar dicha metodología a los datos económicos antes mencionados y se exponen brevemente algunos pormenores de los softwares utilizados.

ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES (ACP)

La idea fundamental del análisis de componentes principales es encontrar una secuencia de vectores ortogonales que expliquen de la forma más eficiente la varianza de las observaciones. Es decir: reducir la dimensión del conjunto de datos conservando tanto como sea posible la variación presente en los mismos. Este método fue propuesto por Pearson (1901) a modo de solución para algunos problemas que eran de interés para la biometría de la época. En dependencia del campo de aplicación, las componentes principales suelen ser conocidas también como la transformada discreta de Karhunen-Loève (análisis de señales), funciones bases ortogonales empíricas (meteorología e investigaciones atmosféricas), índices semánticos latentes (recuperación de datos). Actualmente constituye una herramienta esencial para el análisis de datos multivariados y la reducción de la dimensión; de hecho, prácticamente la totalidad de los libros de texto sobre análisis de datos multivariados cubren el tema, en particular: Jolliffe (2002).

Definición

Sea x un vector de p variables aleatorias. Se supone que interesan las estructuras de varianza y covarianza entre las p variables. Primeramente se considera la función lineal $\propto 'x$ de los elementos de x de máxima varianza, donde $\propto_1$ es un vector de p constantes $\propto_{11}, \propto_{12}, \dots, \propto_{1p}$ y ' denota la transpuesta. De esta forma:

$$\propto_1' x = \propto_{11} x_1 + \propto_{12} x_2 + \cdots + \propto_{1p} x_p = \sum_{j=1}^{p} \propto_{1j} x_j.$$

Luego se considera la función lineal $\propto_2' x$ no correlacionada con $\propto_1' x$ de máxima varianza y así sucesivamente de manera tal que en el k-ésimo paso se considera la función lineal $\propto_k' x$ de máixma varianza no correlacionada con $\propto_1' x, \propto_2' x, \dots, \propto_{k-1}' x$. Se tiene entonces la siguiente

Definición: Dadas las observaciones $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^p$*, la primera componente principal se define como:*

$$\propto_1 = \max_{\|\propto\|_2=1} N^{-1} \sum_{i=1}^{N} (\propto^T x_i)^2$$

La siguientes componentes principales $\propto_k$ *se definen de forma análoga sujetas a las restricciones:*

$$\propto_j^T \propto_k = 0 \; \forall j < k$$

La maximización de la media cuadrática es equivalente a identificar la más fuerte e importante forma de variación en el conjunto de variables. Para garantizar que el problema esté bien definido es indispensable imponer una restricción sobre el conjunto de posibles soluciones; en este caso se escogió la restricción de normalidad aunque otras, tales como: $max\left|\propto_{1j}\right| = 1$ o $\propto_j \propto_j' =$ constante, también pueden ser útiles en algunas circunstancias. Para las componentes siguientes se mantiene la búsqueda de formas dominantes de variación, pero se les exige ortogonalidad con vistas a que de indicaciones de algo nuevo con respecto a las anteriores. Esta restricción es la causante de que el grado de variación presente en las sucesivas componentes vaya disminuyendo en cada paso. Es de esperar que a partir de cierto $n \ll p$ se pierda interés en los modos de variación que aparecen.

Nótese que la definición anterior no implica una solución única; siempre es posible cambiar los signos de una componente sin afectar el valor de la varianza que esta explica. Es usual sustraer la media a cada variable antes de realizar un análisis de componentes principales. La mes es un aspecto importante para caracterizar los datos, pero para darle todo el protagonismo a las componentes en la descripción de las formas de variación en términos de las características de los casos específicos con los que se cuenta es habitual considerar las variables centradas.

Análisis de valores y vectores propios

En esta sección se expone otra caracterización del análisis de componentes principales en términos del análisis de valores y vectores propios de una matriz. Se considera el caso en que el vector de variables aleatorias x tiene una matriz de covarianzas Σ conocida. Esta es la matriz cuyo (i,j)-ésimo elemento es la covarianza entre el í-ésimo y el j-ésimo elemento de x cuando $i \neq j$ y la varianza del j-ésimo elemento de x si $i = j$. Es posible demostrar que para k = 1, 2, …, p el vector de pesos de la k-ésima componente principal coincide con el vector propio $\propto_k$ de Σ asociado al k-ésimo mayor valor propio λ_k. Una demostración standard de la cuestión anteriore aparece en Jolliffe (2002); también se pueden consultar los textos de Diamantaras & Kettenring, 1996, y Flury, 1988, para demostraciones alternativas. Se tiene entonces la siguiente caracterización:

Sea $\Sigma = p^{-1} X' X$ *la matriz de covarianzas de* $x_1, x_2, \dots, x_p$ *con valores propios* $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m < 0$. *Entonces*

$$\propto_1 = \max_{\|\propto\|_2 = 1} \sum_{i=1}^{N} (\propto^T x_i)^2 = \max_{\|\propto\|_2 = 1} \propto ' \Sigma \propto$$

Es equivalente a la solución de:

$$\Sigma\alpha_1 = \lambda_1 \alpha_{1, \|\alpha_1\|} = 1$$

Por lo tanto, de acuerdo con cómo se ha definido, el problema del análisis de componentes principales es equivalente al problema numérico y algebraico de resolver la ecuación $\Sigma\alpha = \lambda\alpha$.

ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES FUNCIONALES (ACPF)

El análisis de las componentes principales fue uno de los primeros métodos adaptados a datos funcionales. La idea fundamental de esta extensión es la de conservar todas las bondades del ACP como herramienta para la reducción de la dimensión, acondicionándolas a este tipo de datos que ha cobrado tanta fuerza en los últimos años. Este cambio a datos funcionales se puede ver simplemente como un remplazo de los vectores por funciones, las matrices por operadores lineales, las matrices de covarianza por operadores de covarianza y los productos escalares en espacios vectoriales por productos escalares en espacios funcionales.

ACP para datos funcionales

¿Cómo proceder cuando los datos son funciones? La estructura usual x_{ij}, $i = 1,2,\dots,n; j = 1,2,,\dots,p$; es decir: *p* variables con *n* observaciones, es remplazada por $x_i(t)$, $i = 1,2,\dots,n$ donde *t* es continuo en algún intervalo I. Se observa que en lugar del subíndice *j* del caso multivariado aparece el subíndice continuo *t*. Es usual suponer que los datos están centrados, es decir: se sustrae la media de las curvas originales. Como se vio en la sección anterior la primera componente tiene coeficientes, también llamados pesos, $\propto_{11}, \propto_{21}, \dots, \propto_{p1}$ que maximizan:

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{p} \propto_{j1} x_{ij} \right]^2$$

Sujeto a $\sum_{j=1}^{p} \propto_{j1}^2 = 1$. Para el caso funcional, el vector de pesos se sustituye por la función $\propto_1(t)$.Al trabajar con el caso continuo, las integrales sustituyen a las sumatorias, por lo que $\propto_1(t)$ maximiza

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left[\int \propto_1(t) x_i(t) dt \right]^2$$

Con la restricción $\int \propto_1^2(t) = 1$. Estas integrales están definidas en el intervalo I de valores de *t* en el que se observan los datos. Se sigue un razonamiento similar al de la pasada sección y se tiene la siguiente definición:

Definición: La primera componente principal funcional $\propto_1(t)$ *de X está definida por:*

$$\propto_1(t) = \max\|\propto\|^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{`n}\left[\int \propto_1(t)x_i(t)\,dt\right]^2$$

La k-ésima componente principal funcional $\propto_k(t)$ *se halla de forma análoga, sujeta a la restricción adicional:*

$$\int \propto_j(t) \propto_k(t)dt = 0 \ \forall j < k.$$

El operador covarianza y el análisis de valores y vectores propios

En secciones anteriores se estableció la equivalencia entre el problema de las componentes principales y el análisis de los valores y vectores propios de la matriz de covarianza. Ahora bien, ¿será posible mantener dicha correspondencia si se trabaja con la versión funcional del ACP? La respuesta es afirmativa.

Sea $v(s,t)$ la función de covarianza de la muestra definida por:

$$v(s,t) = n^{-1}\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i(t)x_i(t).$$

Para una función arbitraria *f* sobre I, el operador de covarianza de la muestra V está definido por

$$(Vf)(s) = \int_I v(s,t)f(t)dt \ \ s \in I$$

Dicho operador extiende el concepto de matriz de covarianza de la maestra a los datos funcionales< además, es posible probar que este es un operador lineal, simétrico y positivo y, por lo tanto, el teorema espectral para operadores lineales garantiza la existencia de funciones propias ortogonales $f_k(t)$ y valores propios $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \cdots \geq 0$ de V; es decir: se satisface

$$(Vf_k)(t) = \rho_k f_k(t).$$

En las secciones 5.2. y 8.2.4. de Ramsay, 2012, se demuestra que los pesos α_k de las componentes principales funcionales satisfacen la ecuación

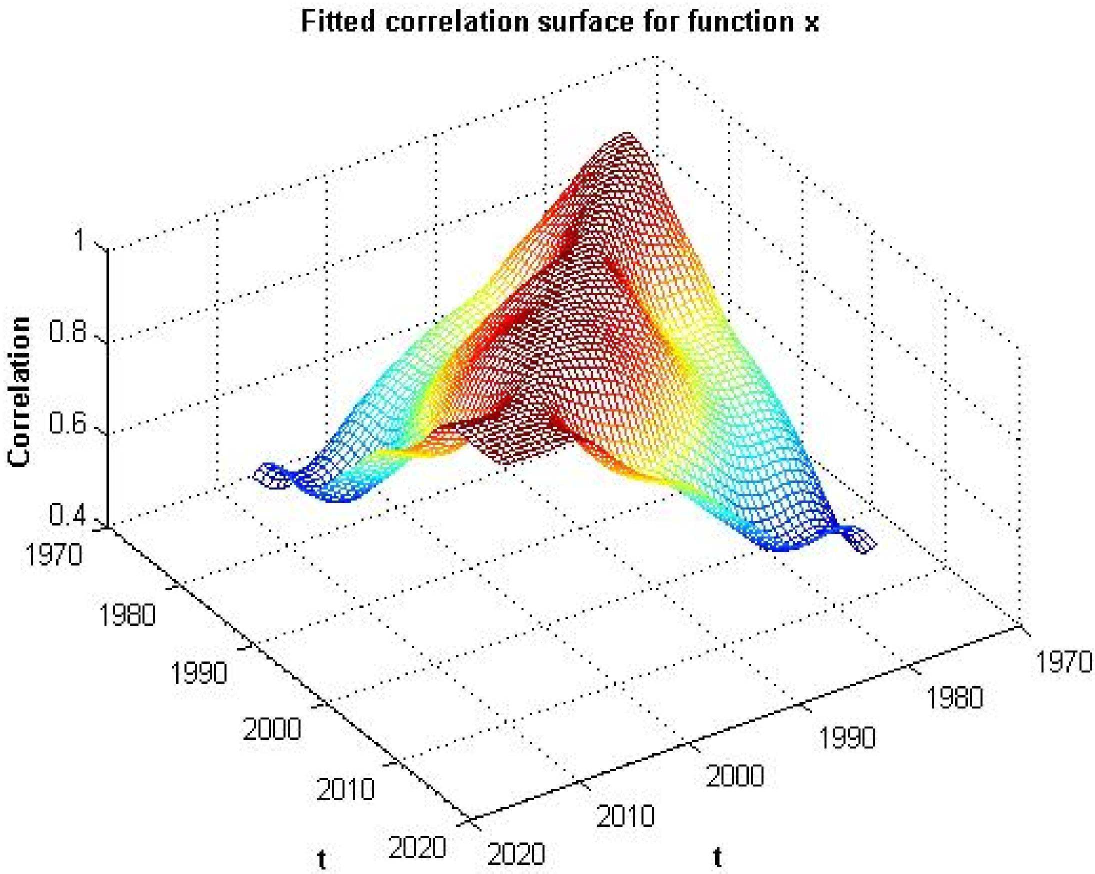
$$V\alpha = \rho\alpha$$

para un valor apropiado de ρ. Por tanto, es posible formular de manera idéntica las ecuaciones propias de la matriz de covarianza del caso multivariado y la del operador de covarianza de la extensión al caso funcional, utilizando una notación adecuada.

Sin embargo, existe una diferencia importante entre el problema de análisis de vectores y valores propios del caso multivariado y el del caso funcional. El número de pares valor-vector (función) propio es, en principio, totalmente diferente. El rango de la matriz de covarianza en el caso multivariado está acotado superiormente por el número de variables, pero en el caso funcional, su análogos es el número de valores que toma la función en I, es decir: infinitos. No obstante, dado que las funciones x_i no son linealmente dependientes, el operador V tiene rango $n - 1$ y solo hay $n - 1$ valores propios diferentes de cero.

En la figura 1 aparece el gráfico del operador de covarianza para los datos económicos que se analizan en el presente trabajo.

Fig. 1 Gráfico del operador de covarianza para los datos económicos



ACP vs. ACPF

Resulta interesante establecer una comparación entre algunos aspectos esenciales de los métodos mencionados anteriormente. En la Tabla 1 aparecen las diferencias fundamentales entre el análisis de componentes principales clásico y el funcional. Es evidente el paralelismo existente< el cambio fundamental es el espacio sobre el cual se trabaja. Precisamente debido a este cambio emergen las restantes discrepancias. En el aspecto práctico existen importantes particularidades del ACPF que surgen como consecuencia de la naturaleza de los datos con los que se trabaja. Así, por ejemplo, aparecen los métodos de obtención de curvas a partir de datos discretos, los de suavizamiento de las curvas que constituyen el conjunto de datos y los de las componentes principales resultantes. Estas estrategias pueden consultarse en los trabajos de Ramsay & Silverman: *Applied Functional Data Analysis: Methods and Case Studies* (2002) y *fda: Functional Data Analysis, versión 2.3.2 para el paquete* R *(2012).*

Tabla 1: Comparación entre ACP y ACPF

	ACP	ACPF
Variables	$X = [x_1, x_2, \dots, x_p]$	$f(x) = [f_1(x), \dots f_x(x)]$, x∈ $[x_1, x_p]$
Datos	Vectores en $\mathbb{R}^p$	Curvas en $L_2[x_1, x_p]$
Covarianza	Matriz $\Sigma = Cov(X)$	Operador $V : L_2[x_1, x_p] \to L_2[x_1, x_p]$
Vectores Propios	Vectores $\propto_j \in \mathbb{R}^p$ $\Sigma\alpha_k = \lambda_k\alpha_k$, $1 \leq k \leq \min(n, p)$	Funciones $\propto_k (x) \in L_2[x_1, x_p]$, $(V \propto_k)(x) = \lambda_k\alpha_k$, $1 \leq k \leq n$
Componentes	Variables aleatorias en $\mathbb{R}^p$	Variables aleatorias en $L_2[x_1, x_p]$

HERRAMIENTAS PARA LA INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

La interpretación de las componentes no es un procedimiento inmediato para la mayoría de los problemas de ACPF. Existen varias técnicas propuestas en la sección 8.3. de Ramsay & Silverman (2005) que resultan de mucha ayuda. A continuación se presentan las de uso más extendido

Gráfico de las componentes como perturbaciones de la media

Este método propone examinar las gráficas de la media global y de las funciones que se obtienen al sumar y sustraer un múltiplo conveniente de cada una de las componentes.

En la figura 4 se muestra dicha gráfica para el ejemplo de los datos económicos que se analizan en este trabajo. En cada caso, la curva negra es la media, las curvas roja y azul muestran los efectos de adicionar y sustraer un múltiplo de cada componente. Este gráfico esclarece el efecto de cada componente. En la sección dedicada a la interpretación de los resultados de nuestro problema se hará una discusión detallada de los gráficos contenidos en la figura.

La elección del múltiplo de las componentes principales que debe seleccionara se discute ampliamente en la literatura en la que aparecen algunas opciones, pero de manera general debe tratarse de un valor que se ajuste al comportamiento de la media y que permita analizar los gráficos.

Gráfico de los coeficientes de las componentes principales

Entre las ventajas del ACP se incluye la posibilidad de examinar el efecto de cada componente sobre el conjunto de datos. Esta ventaja la hereda también el análisis de componentes principales funcionales.

En la figura 5 se presentan los resultados para nuestro ejemplo. La utilización de este gráfico es exactamente igual al del ACP por lo que no se entrará en detalles aquí. En la sección de discusión de los resultados del problema económico se hablará sobre los resultados en este caso.

ALGUNOS SOFTWARES DISPONIBLES

R y fpca

Actualmente existen numerosos paquetes implementados en R que tienen incorporado el método del análisis de componentes principales funcionales (PENG & PAUL (2011), RAMSAY (2012), CRANICEANU (2012)). En este trabajo se empleó fundamentalmente el paquete *fpca* desarrollado por PENG & PAUL. Este paquete estima las componentes principales funcionales utilzando una estimación máximo-verosímil mediante el procedimiento de Newton-Raphson.

PACE

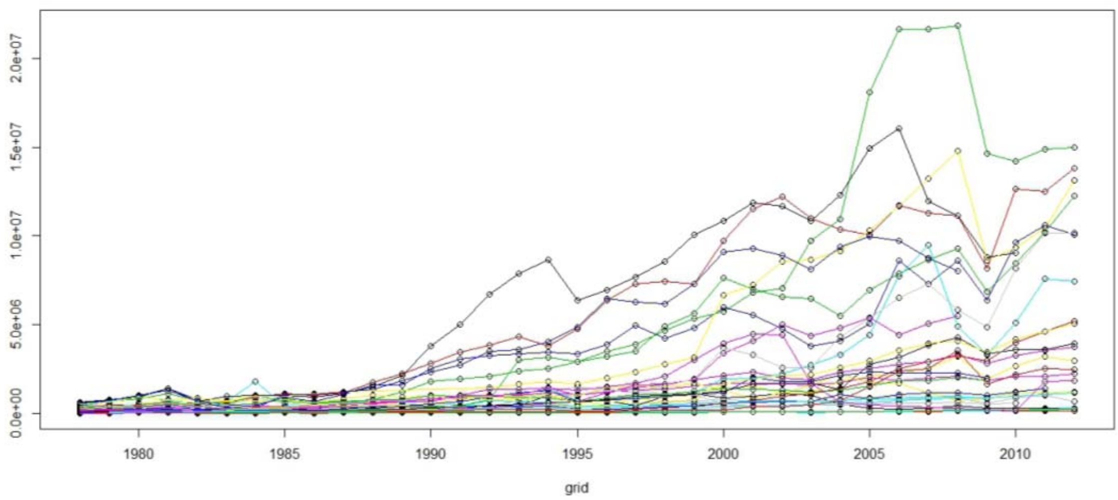
La librería PACE (MATLAB PACKAGE VERSION 2.11) contiene las implementaciones de varios métodos del análisis de datos funcionales. El programa principal de este paquete es el *fpca* desarrollado especialmente para trayectorias densas o sparse utilizando el Análisis Principal por Estimación Condicional, PACE, por sus siglas en inglés.

PACE resulta útil para el análisis de datos generados a partir de trayectorias aleatorias. Además, incluye opciones para el análisis de datos longitudinales, el análisis de procesos estocásticos de muestras de trayectorias observadas y para el análisis de dinámicas latentes.

LOS DATOS ECONÓMICOS

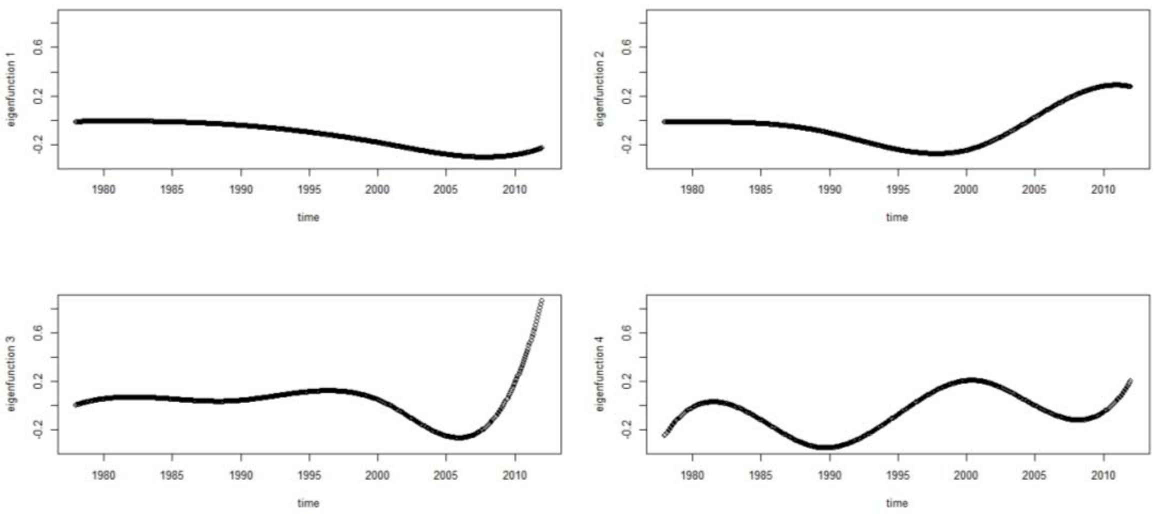
La revista *Expansión 500 – Las empresas más Importantes de México 1978-2012* (CNN, consultado en 2013) publica numerosas cifras de interés acerca de las principales empresas mexicanas. El conjunto de datos considerado consiste en una matriz de 30 x 35, constituida por las series de las ventas anuales de las treinta empresas líderes de la economía mexicana, recogidas entre los años 1978 y 2012. En la figura 2 aparecen las series de valores.

Fig. 2. Gráfico del conjunto de datos



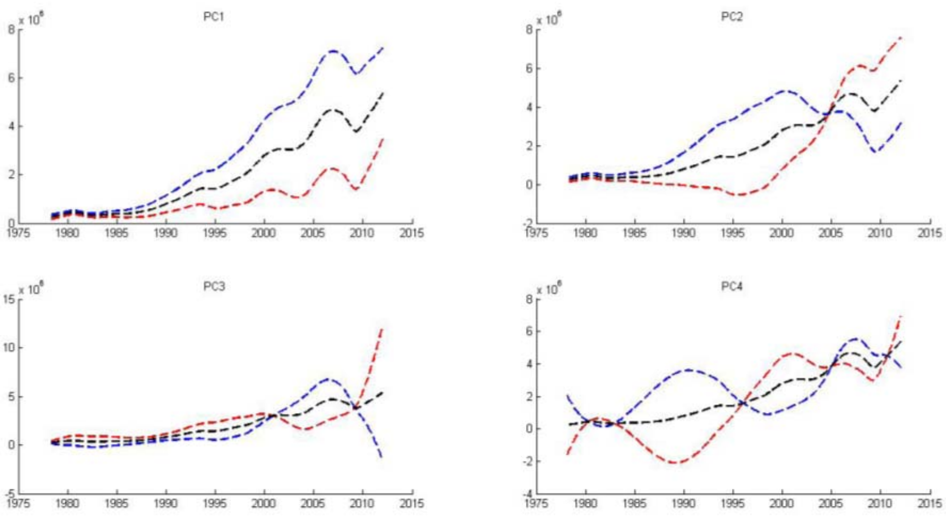
La aplicación del ACPF a este conjunto de datos dio como resultado la identificación de 4 componentes principales que se muestran en la figura 3. El software utilizado fue *fpca* y posteriormente se comprobaron los resultados con Matlab, en particular uti lizando PACE.

Fig. 3. Gráficos de las primeras cuatro componentes principales



En la figura 4 aparecen los resultados de la aplicación del gráfico con perturbaciones de la media. Como se mencionó anteriormente, la curva negra corresponde a la media y las roja y azul a los efectos de adicionar y sustraer un múltiplo, respectivamente.

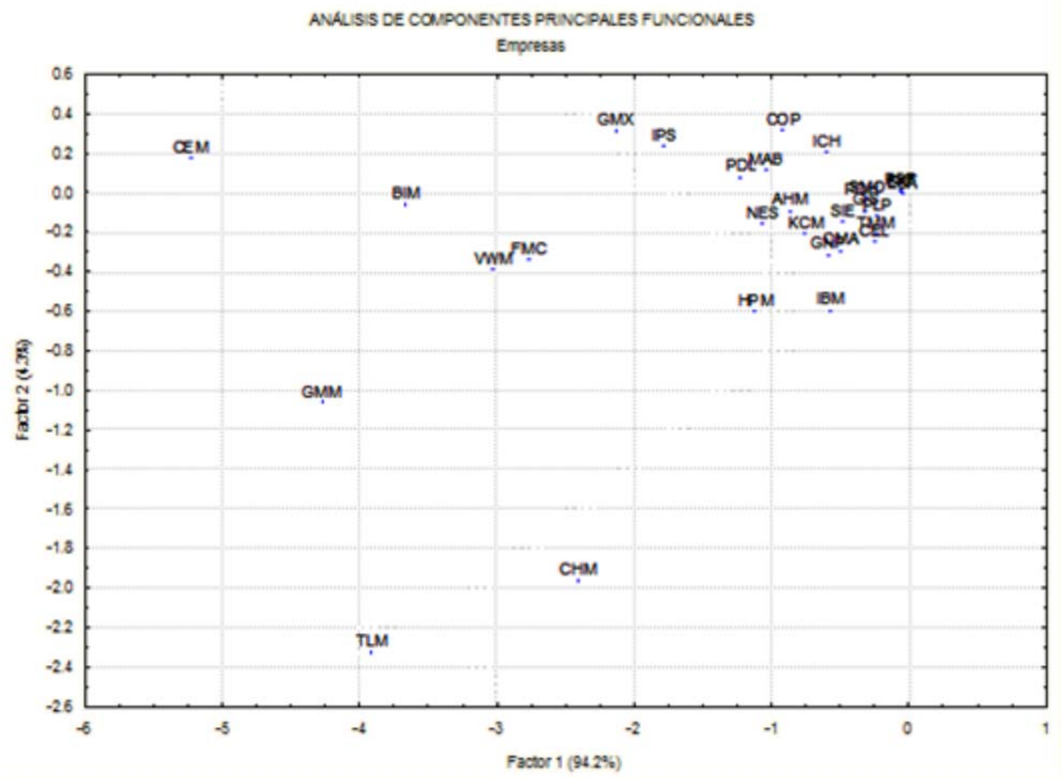
Fig. 4. Gráfico de las componentes principales con perturbaciones de la media



Para el caso de la primera componente, se observa una tendencia al crecimiento en el tiempo, así como a una separación de la media a partir de 1995. La segunda corresponde a un efecto de viraje en el tiempo en los últimos años de los 2000 producto de la crisis de 2008-2009. Las secuelas de las crisis de Salinas-Zedillo, la de 2001 7 la de 2008 se observan en la tercera componente. En la cuarta se nota una marcada sensibilidad a las fluctuaciones de la economía.

En la figura 5, cada empresa se identifica mediante una abreviatura de tres letras. Las letras aparecen posicionadas de acuerdo con los coeficientes de las primeras dos componentes principales. Telmex (TLM) aparece cercano a la esquina inferior izquierda debido al crecimiento vertiginoso de sus ventas anuales y a su estabilidad en el tiempo.

Fig. 5. Gráfico de las empresas en el sistema de las dos primeras componentes

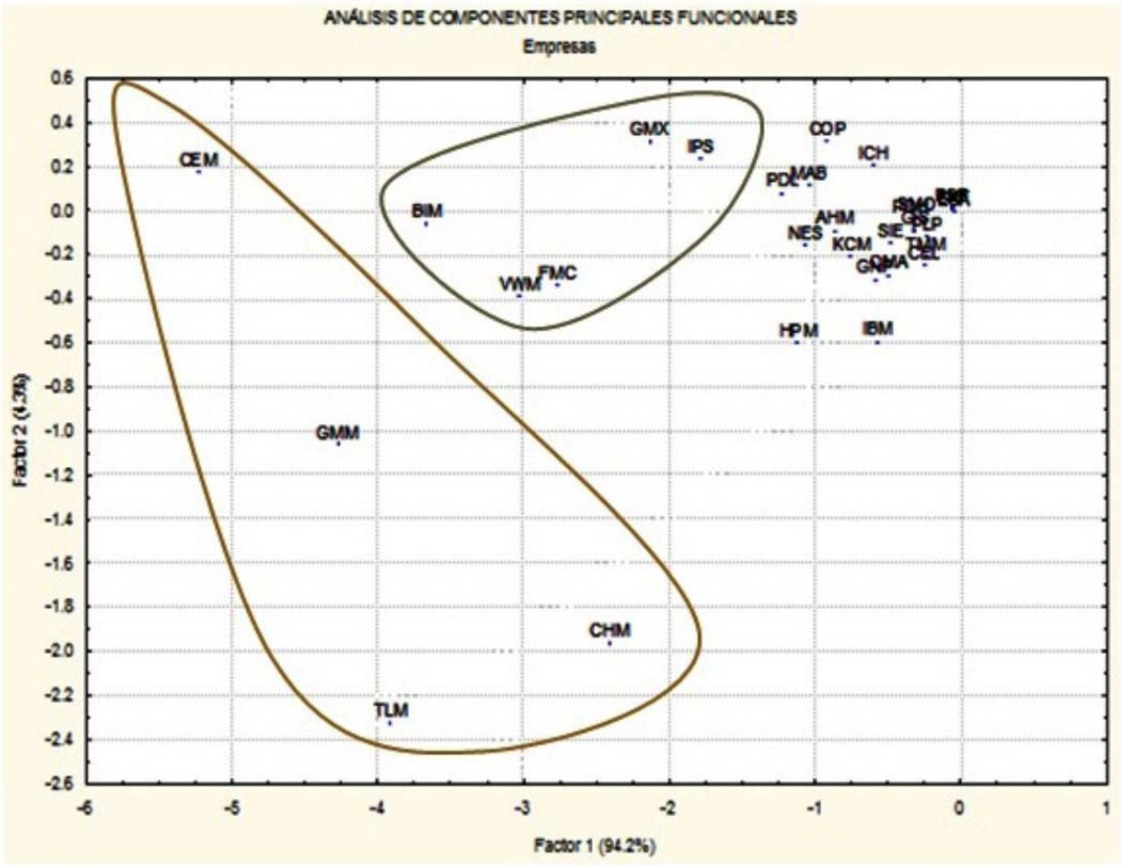


Con la ayuda de este gráfico fue posible identificar tres grupos dentro del conjunto de datos. Esta clasificación aparece en la figura 6. El primero está integrado por las compañías CEMEX, General Motors de México, TELMEX y Chrysler de México, presenta un leve impacto de la crisis de 1994-1995, así como un rápida recuperación dela crisis de 2008-2009. El grupo compuesto por la Volkswagen de Mëxico, las Industrias Peñoles y Subsidiaras, el Grupo Industrial Bimbo, la Ford Motors Company y el Grupo México, se distingue por una rápida respuesta antes las crisis. El tercer grupo es más heterogéneo: está integrado por las veintiuna empresas restantes. En la tabla 2 aparecen los nombres completos de las empresas.

Tabla 2: Relación de empresas

General Motors de México	GMM	Grupo Coppel	COP
For Motor Company	FMC	Compañía Mexicana de Aviaciòn	CMA
Industrias Peñoles y Subsidiarias	IPS	Grupo Nacional Provincial	GNP
Kimberly Clark de México	KCM	Seguros Monterrey	SMO
Siemens	SIE	Hewlett Packard de México	HPM
Grupo Industrial Saltillo	GIS	Grupo Industrial Bimbo	BIM
Grupo TMM	TMM	Grupo México	GMX
Exportadora de Sal	EXS	Mabe	ICH
CEMEX	CEM	Industrias CH	FSF
El Palacio de Hierro	PDH	Fca. de Papel San Francisco	CHM
SKF Mexicana	SKF	Chrysler de México	PLP
Compañía Nestlé de México	NES	Ganaderos Productores de Leche Pura	IBM
Altos Hornos de México	AHM	IBM de México	PDL
Celanese Mexicana	CEL	El Puerto de Liverpool	VWM
TELMEX	TLM	Volkswagen de México	

Fig. 6. Gráfico con los grupos de empresas



CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Los resultados obtenidos en el trabajo ilustran la capacidad de las componentes principales funcionales para destacar características importantes de un conjunto de series de tiempo económicas. Fue posible identificar cuatro componentes que reflejan una tendencia general al crecimiento de las ventas a lo largo del período analizado y el efecto de las crisis de 1994-1995, 2001 y 2008-2009. Se obtuvieron grupos de empresas de acuerdo con lo explicado por las componentes.

A continuación aparecen algunas direcciones a seguir en trabajos futuros vinculadas con el análisis de componentes principales funcionales y/o con el análisis de datos funcionales:

- ACPF multivariado

  En este trabajo se considera el análisis de componentes principales funcionales cuando los datos son observaciones de una función que usualmente depende del tiempo. El ACPF multivariado se encarga del caso en el que cada observación está constituida por un vector de funciones. Recientemente varios investigadores han dedicado sus esfuerzos a nutrir esta rama del ACPF y numerosos problemas numéricos y de aplicación han sido planteados y, en algunos casos, resueltos. Véase Berrendero *et al.* (2011) , así como el capítulo 10 de Ramsay & Silverman (2005).

- ACP para datos mixtos

  En la metodología estadística es característico que los problemas no encajan perfectamente dentro de una categoría. En el contexto de los métodos discutidos en este trabajo, a menudo aparecen conjuntos en los que por cada individuo se tiene un vector de datos y una función. Para estos casos se ha desarrollado un método que produce componentes principales con la misma estructura que los datos, por lo que la variabilidad explicada por cada una de estas componentes puede ser dividida en una parte correspondiente al vector de datos y otra a la registrada por las curvas.

- Una alternativa al ACPF: Métodos no paramétricos

  En el libro de Ramsay & Silverman (2005) se señalan algunas alternativas al ACPF para analizar datos funcionales. Un área muy activa de investigación es la de los métodos no paramétricos, donde se utiliza la estimación por kernel en una extensión al caso funcional. El texto de Ferraty & Vieu (2006) incluye los aspectos teóricos y prácticos del tema. Asimismo, también se trata esta temática en Cardot (2005) y en Mas (2008).

REFERENCIAS

Abdi, H. & Williams, L.J. (2010): Principal Components Analysis, WIREs Computational Statistics, 2, Julio agosto, pp. 433-458

Berrendero, J.R., Justel, A. & Svarc, M. (2011): Principal components for multivariate functional data, Computational Statistics and Data Analysis, 55, pp. 2619-2634

Cardot, H. (2005): Nonparametric regression for functional responses with application to conditional functional principal component analysis, Reporte Técnico, Université Paul Sabatier

CNN Expansión 500 – Las empresas m´s importantes de México. URL: http://www.cnnexpansion.com/rankings/1978-2012/las-500-empresas-más-importantes-de-méxico. Consultado en enero de 2013.

Cobelli, C., Donà, G., Harrison, A.J., Preatoni & Rodano, R. (2009): Application of functional principal component analysis in race walking: An emerging methodology. Sports Biomechanics, 8(4), pp. 284-301

Craniceanu, C. (2012): refund: Regression with Functional Data, R package version 0.1-6, URL: http://CRAN.R-project.or/package=refund

Daniele, M. (2006): Functional principal components analysis to study environmental data, Spontanee, pp. 677-680

Diamantaras, K.I. & Kettenring, J.R. (1996): Principal Component Neural Networks Theory and applications (Chapter 3), Wiley, Nueva York

Dony, R.D. (1995): Adaptive transform coding of images using a mixture of principal components, Tesis presentada en opciòn al PhD.

Ferraty, F. & Vieu, P. (2006): Nonparametric functional data analysis, theory and practice, Springer, Berlín

Flury, B.D. (1988): Common Principal Components and Related Models (Section 2.2.), Wiley, Nueva York

Ingrassia, S. & Constanzo, G.D. (2005): Functional Principal Component Analysis of Financial Time Series, en Vichi, M., Monari, P. & Montanari, S. (Eds.): New Developments in Classification and Data Analysis, Springer, Berlín

Jolliffe, I.T. (2002): Principal Component Analysis (2nd Edition), Springer, Berlín

Mas, A. (2008): Local functional principal component analysis, Complex analysis and operator theory, 2, pp. 137-167

NSF grants (2012): PACE: Principal. Analysis by Conditional Estimation, Matlab package version 2.11

Pearson, K. (1901): On lines and planes of closest fit to systems of points in space, Phil. Mag., 2(6), pp. 559-572

Peng, J. & Paul, D. (2011): fpca: Restricted MLE for Functional Principal Component Analysis, R package version 0.2-1, URL: http://CRAN.R-project.org/package=fpca

Ramsay, J.O. (2012): fda: Functional Data Analysis, R package version 2.3.2., URL: http://CRAN.R-project.org/package=fda

Ramsay, J.O. & Silverman, B.W. (2002): Applied Functional Data Analysis: Methods and Case Studies, Springer, Nueva York

Ramsay, J.O. & Silverman, B.W. (2005): Functional Data Analysis (2nd edition), Springer, Nueva York